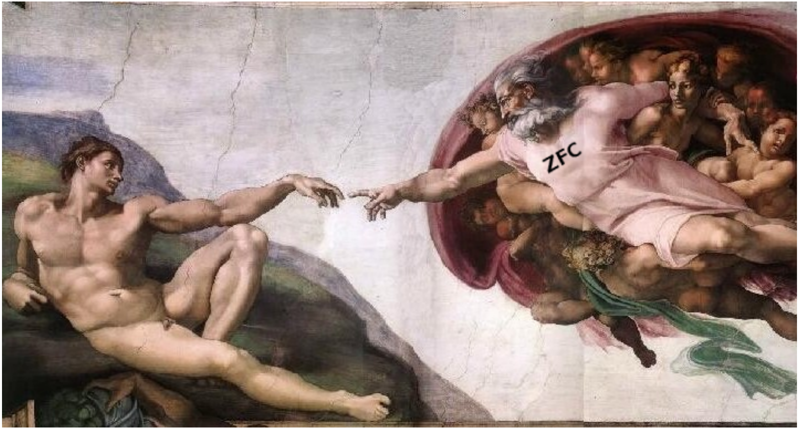
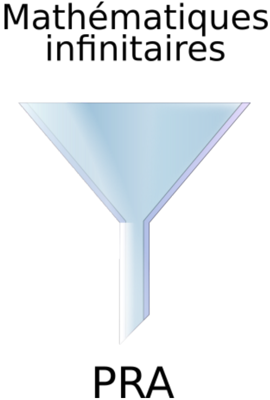
Introduction aux
Mathématiques à rebours

Ludovic PATEY

3 février 2017


ZFC


Mathématiques
infinitaires
PRA

Théorème

$$T$$

Axiomes Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow T$$

Axiomes Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \Leftarrow T$$

Arithmétique du second ordre

$$t ::= 0 \mid 1 \mid x \mid t_1 + t_2 \mid t_1 \cdot t_2$$

$$\begin{aligned} f ::= \;& t_1 = t_2 \mid t_1 < t_2 \mid t_1 \in X \mid f_1 \vee f_2 \\ & \mid \neg f \mid \forall x.f \mid \exists x.f \mid \forall X.f \mid \exists X.f \end{aligned}$$

(Hilbert et Bernays)

Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est calculable s'il existe un programme informatique qui, pour une entrée n, décide si $n \in A$.

Thèse de Church-Turing

Cette définition est indépendante du langage de programmation choisi.

Arithmétique de Robinson

1. $m + 0 = m$
2. $m + (n + 1) = (m + n) + 1$
3. $m \times 0 = 0$
4. $m \times (n + 1) = (m \times n) + m$
5. $m + 1 \neq 0$
6. $m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$
7. $\neg(m < 0)$
8. $m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$

Schéma de compréhension

$$\exists X \forall n (n \in X \Leftrightarrow \varphi(n))$$

pour toute formule $\varphi(n)$ où X est libre.

Hiérarchie arithmétique

- Σ_1^0 : définissable par une formule $\exists n.\phi$
- Π_1^0 : définissable par une formule $\forall n.\phi$
- Δ_1^0 : à la fois Σ_1^0 et Π_1^0

où ϕ est une formule ne contenant que des quantificateurs bornés.

Hiérarchie arithmétique

- Σ^0_1 : définissable par une formule $\exists n.\phi$
- Π^0_1 : définissable par une formule $\forall n.\phi$
- Δ^0_1 : à la fois Σ^0_1 et Π^0_1

où ϕ est une formule ne contenant que des quantificateurs bornés.

Calculable = définissable par un prédicat Δ^0_1

Schéma de compréhension Δ^0_1

$$\forall n(\varphi(n) \Leftrightarrow \psi(n)) \Rightarrow \exists X \forall n(n \in X \Leftrightarrow \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ^0_1 où X est libre, et ψ est une formule Π^0_1.

Schéma d'induction

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$$

pour toute formule $\varphi(n)$

Schéma d'induction Σ^0_1

$$\varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ^0_1

équivalent à

Schéma de compréhension bornée Σ^0_1

$$\forall p \exists X \forall n(x \in X \Leftrightarrow n < p \land \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ^0_1 où X est libre.

Schéma d'induction Σ_1^0

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0

RCA_0

Arithmétique de Robinson

$$m+1 \neq 0$$
$$m+1 = n+1 \rightarrow m = n$$
$$\neg(m < 0)$$
$$m < n+1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$$

$$m+0 = m$$
$$m+(n+1) = (m+n)+1$$
$$m \times 0 = 0$$
$$m \times (n+1) = (m \times n) + m$$

Schéma d'induction Σ_1^0

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0

Schéma de compréhension Δ_1^0

$$\forall n(\varphi(n) \Leftrightarrow \psi(n)) \Rightarrow \exists X \forall n(n \in X \Leftrightarrow \varphi(n))$$

où $\varphi(n)$ est une formule Σ_1^0 où X est libre, et ψ est une formule Π_1^0.

RCA$_0$ capture les mathématiques calculables

$$\mathcal{M} = (\omega, \{X : X \text{ calculable } \}, +, \cdot <)$$

Les mathématiques sont calculatoirement très structurées

Presque tous les théorèmes sont empiriquement équivalents à un parmi cinq ensembles d'axiomes.

$$\Pi^1_1\mathsf{CA} \to \mathsf{ATR} \to \mathsf{ACA} \to \mathsf{WKL} \to \mathsf{RCA}_0$$

PROBLÈME DE HILBERT

Justification des méthodes infinitaires pour prouver le fini

Réductionnisme finitaire :

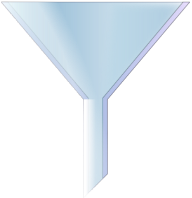
$$T \vdash \varphi \Rightarrow PRA \vdash \varphi$$

pour φ une formule Π^0_1

"Au moins 85% des mathématiques sont réductibles à des méthodes finitaires"
(Stephen Simpson)

Z_2

(Infini)

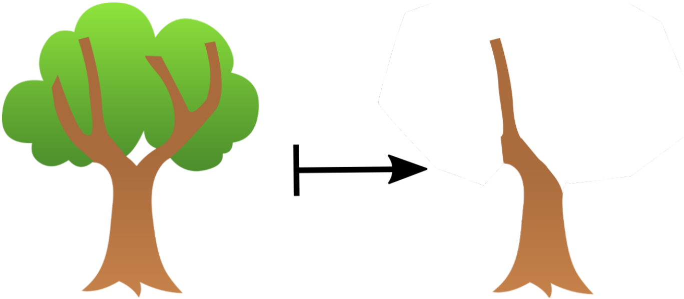


PRA

(Fini)

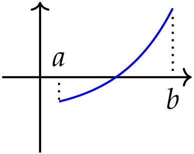
Certains théorèmes peuvent être vus comme des problèmes.

Lemme de König
Tout arbre infini à branchement fini admet un chemin infini.

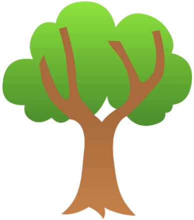


Certains théorèmes sont plus calculables que d'autres.

Théorème des valeurs intermédiaires
Pour toute fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$, il existe un réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$.



Lemme de König
Tout arbre infini à branchement fini admet un chemin infini.

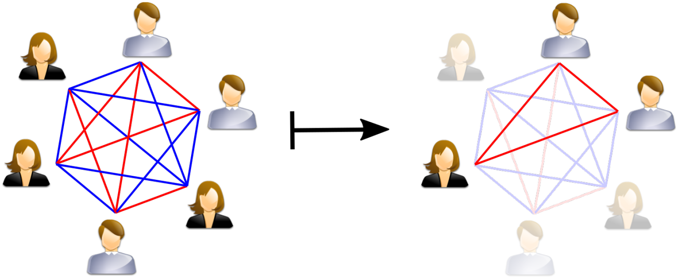


Q est au moins aussi difficile que P si

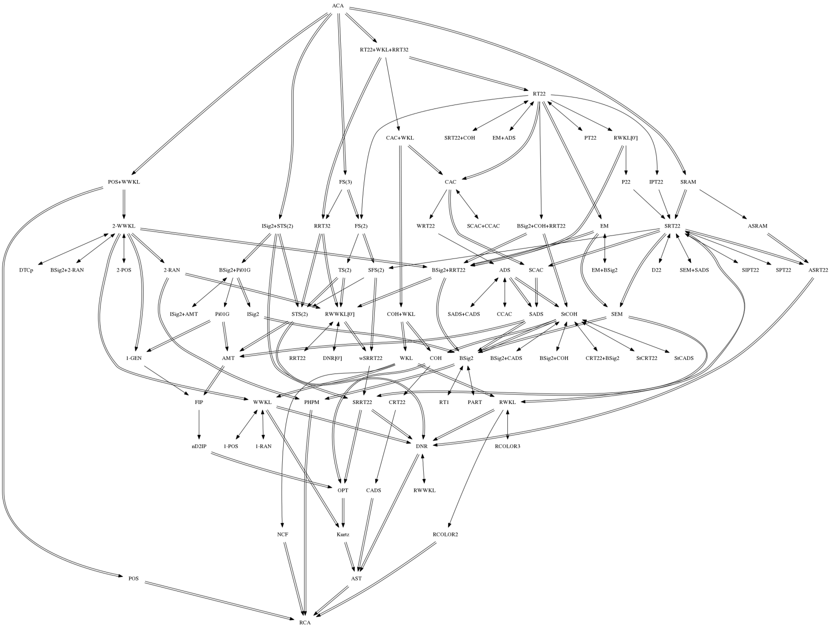
$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{P}$$

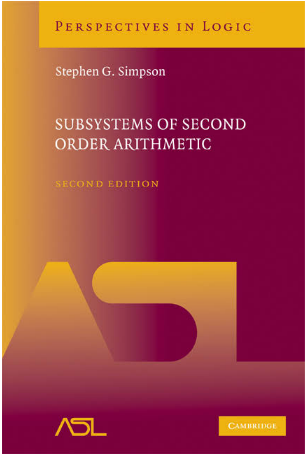
THÉORÈME DE RAMSEY

Tout k-coloriage des n-uplets d'entiers admet un ensemble infini monochromatique.

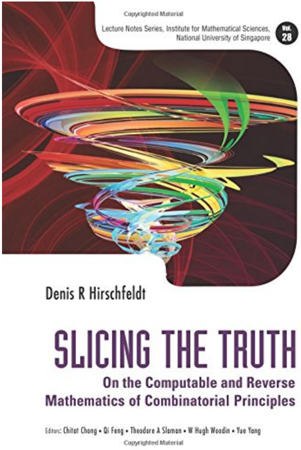


$$\Pi^1_1\mathsf{CA}$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{ATR}$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{ACA}$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{WKL}$$
$$\downarrow$$
$$\mathsf{RCA}_0$$


ACA
RT22+WKL+RRT32
RT22
CAC+WKL
SRT22+COH
EM+ADS
PT22
RWKL[0']
POS+WWKL
FS(3)
CAC
P22
IPT22
SRAM
2-WWKL
ISig2+STS(2)
RRT32
FS(2)
WRT22
SCAC+CCAC
BSig2+COH+RRT22
EM
SRT22
ASRAM
DTCp
BSig2+2-RAN
2-POS
2-RAN
BSig2+Pi01G
TS(2)
SFS(2)
BSig2+RRT22
ADS
SCAC
EM+BSig2
D22
SEM+SADS
SIPT22
SPT22
ASRT22
ISig2+AMT
Pi01G
ISig2
STS(2)
RWWKL[0']
COH+WKL
SADS+CCADS
CCAC
SADS
StCOH
SEM
1-GEN
AMT
RRT22
DNR[0']
wSRRT22
WKL
COH
BSig2
BSig2+CADS
BSig2+COH
CRT22+BSig2
StCRT22
StCADS
FIP
WWKL
PHPM
SRRT22
CRT22
RT1
PART
RWKL
nD2IP
1-POS
1-RAN
DNR
RCOLOR3
OPT
CADS
RWWKL
NCF
Kurtz
RCOLOR2
POS
AST
RCA



Subsystems of second-order arithmetic



Slicing the truth

RÉFÉRENCES

David Hilbert and Paul Bernays.
Grundlagen der Mathematik. I/Foundations of mathematics. I. Part A. Prefaces and §§1–2.
College Publications, London, 2011.

Stephen G. Simpson.
Partial realizations of Hilbert's Program.
J. Symbolic Logic, 53(2) :349–363, 1988.

W. W. Tait.
Finitism.
Journal of Philosophy, 78(9) :524–546, 1981.